Applications - Chapitre 3

Frottements et balistique

- Equation différentielle : équation liant une fonction $f(t)$ et ses dérivées première, seconde et d'ordre supérieur par rapport à t.
- Equation différentielle linéaire inhomogène du premier ordre : équation linéaire liant une fonction $f(t)$ et sa dérivée première :

$$(A.3.1)$$

- Equation différentielle : $(A.3.1)$ remise en forme $(\alpha \neq 0)$

$$(A.3.2)$$

- Changement de "variable" : fonction $g(t)$ rendant l'équation différentielle $(A.3.2)$ homogène :

$$(A.3.3)$$

- Dérivée première : changement de "variable" $(A.3.3)$

$$(A.3.4)$$

- Equation différentielle homogène : à partir de l'équation différentielle inhomogène en substituant $(A.3.3)$ et $(A.3.4)$ dans $(A.3.2)$:

$$(A.3.5)$$

- Equation différentielle homogène :

$$(A.3.6)$$

- Intégration : $(A.3.6)$ sur $t' \in [0, t]$

$$(A.3.7)$$

  où $t \to t'$ et $g\,(t) \to g'\,(t')$ pour distinguer les variables et fonctions dans les intégrants et les bornes d'intégration.

- Résultat de l'intégrale : $(A.3.7)$

$$(A.3.8)$$

- Exponentiation : $(A.3.8)$

$$(A.3.9)$$

- Solution : équation différentielle homogène

$$(A.3.10)$$

- Changement de “variable” : inverse de $(A.3.3)$

$$(A.3.11)$$

- Condition initiale : $(A.3.11)$ évalué en $t = 0$

$$(A.3.12)$$

- Solution : équation différentielle inhomogène $(A.3.11)$, $(A.3.12)$ dans $(A.3.10)$

$$(A.3.13)$$

- Mouvement balistique vertical : axe vertical Oz orienté vers le haut
  1. Vitesse verticale :
  2. Vitesse verticale relative :
  3. Paramètre : où $\tau =$ temps d'amortissement
  4. Paramètre : où $g =$ champ gravitationnel

$(A.3.2) \quad \Rightarrow$

$(A.3.3) \quad \Rightarrow$

$(A.3.10) \quad \Rightarrow$

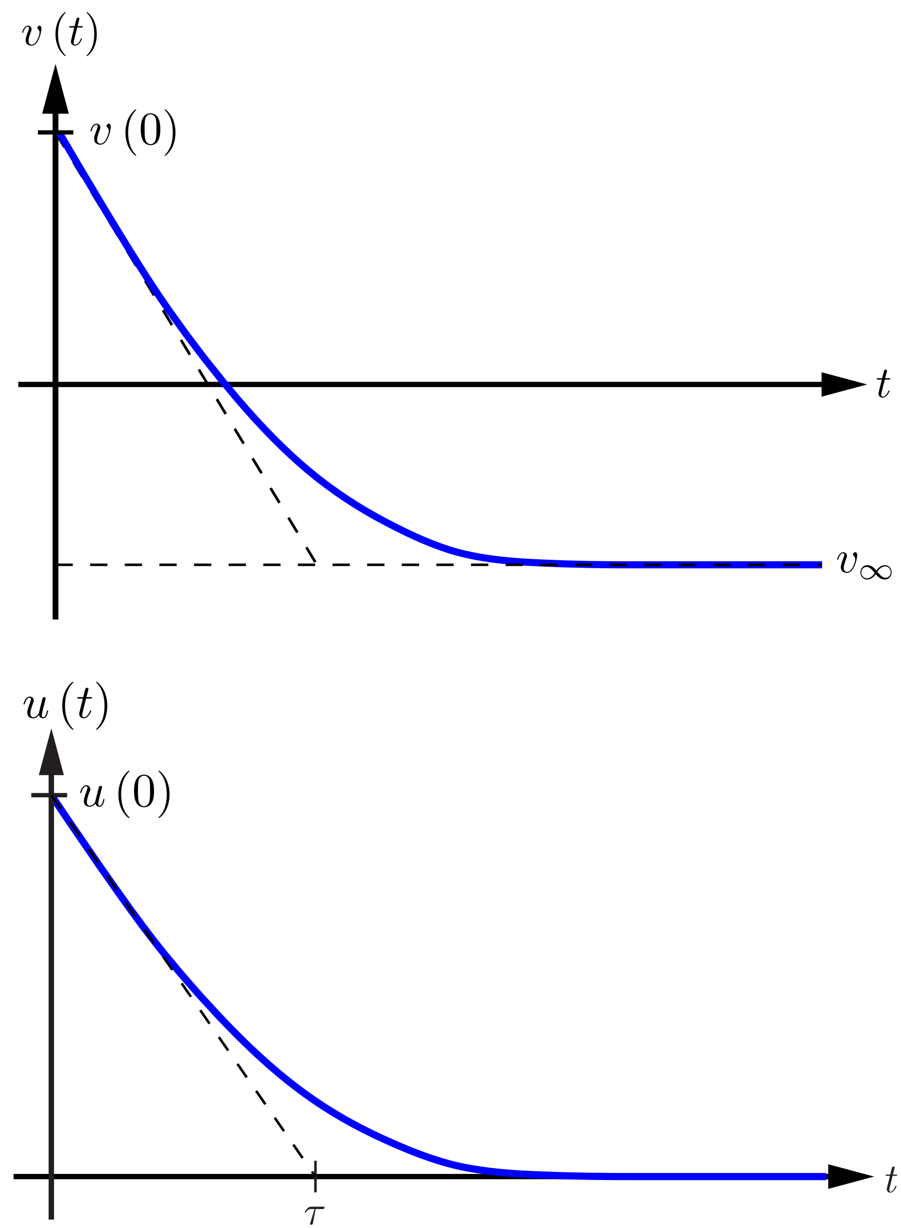
$(A.3.13) \quad \Rightarrow$

- Interprétation physique :

- Vitesse limite de chute :

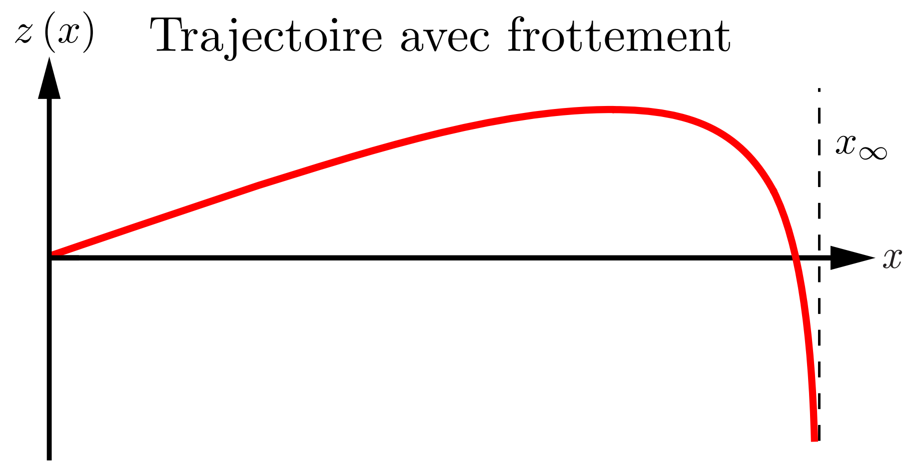
1. $v(t)$ est la vitesse verticale de chute par rapport au référentiel d'inertie du sol.

2. $u(t)$ est la vitesse verticale relative de chute par rapport au référentiel d'inertie qui se déplace à vitesse limite v_∞ par rapport au référentiel d'inertie du sol.



1. Trajectoire avec frottement : (3.54)

$$z(x) =$$



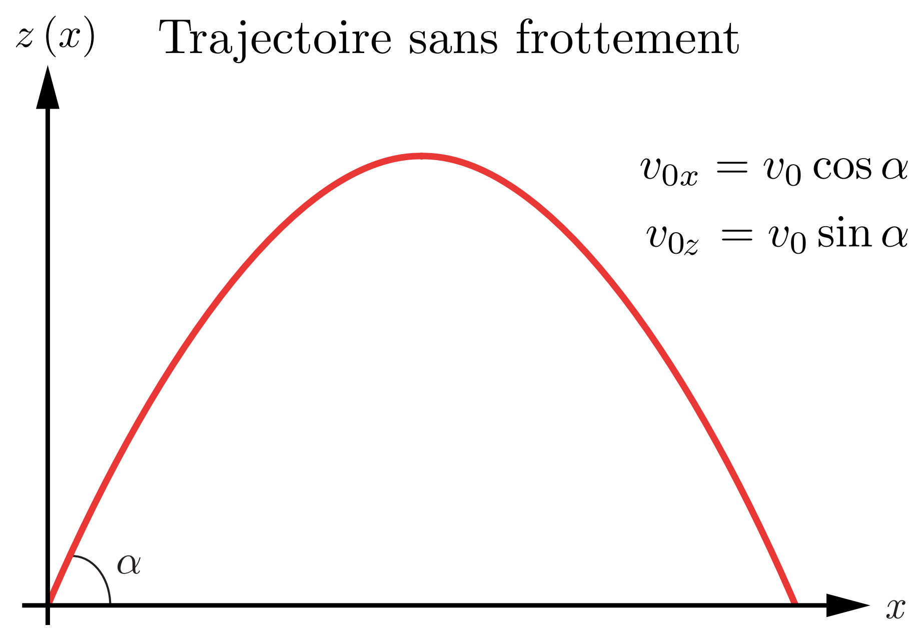
Développement limité au 2^{e} ordre en x/x_∞ (i.e. $x_\infty \to \infty$) :

$$\ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \simeq$$

$$z(x) \simeq$$

2. Trajectoire sans frottement :

$$z(x) =$$



A.3.3 Portée d'un tir balistique avec frottement

- Trajectoire sans frottement : $v_\infty = -\,g\tau$ et $x_\infty = v_{0x}\,\tau$

$$z\,(x) = \frac{1}{2}\,\frac{v_\infty\,\tau}{x_\infty^2}\,x^2 + \frac{v_{0z}\,\tau}{x_\infty}\,x = \qquad (A.3.14)$$

- Trajectoire sans frottement : $(A.3.14)$ $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ et $v_{0z} = v_0\sin\alpha$

$$z\,(x) = \qquad (3.16)$$

Le développement limité au 2^{e} ordre en x/x_∞ lorsque $x_\infty \to \infty$ de la trajectoire avec frottement redonne la trajectoire sans frottement. Ainsi, au 2^{e} ordre en x/x_∞ les frottements s'annulent.

- La correction principale due au frottement est donnée au 3^{e} ordre :

$$\ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \simeq \qquad (A.3.15)$$

- Trajectoire avec frottement au 3^{e} ordre en x/x_∞ : $(A.3.15) \quad \Rightarrow \quad (3.54)$

$$z\,(x) = \qquad (A.3.16)$$

- Trajectoire avec frottement : $(A.3.16)\ v_{\infty} = -\,g\tau$ et $x_{\infty} = v_{0x}\,\tau$

$$z\,(x) = \tag{A.3.17}$$

- Portée : distance de tir en x lorsque $z = 0$:

$$(A.3.17) \quad \Rightarrow \tag{A.3.18}$$

- En multipliant cette équation par $3\,v_{0x}^{3}\tau/gx$, on obtient :

$$\tag{A.3.19}$$

- Les solutions de cette équation du 2^{e} degré en x sont :

$$\tag{A.3.20}$$

- La solution avec le signe "$-$" est à rejeter :

$$\tag{A.3.21}$$

- Portée au 3^e^ ordre en x/x_∞ lorsque $x_\infty \to \infty$ et ainsi $\tau \to \infty$:

$$x = \frac{3}{4}\, v_{0x}\tau \left(-\,1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\,\frac{v_{0z}}{g\tau}} \right) \qquad (A.3.21)$$

- Développement limité au 2^e^ ordre en $16\, v_{0z}/3\, g\tau$ de la racine carrée :

$$\sqrt{1 + \frac{16}{3}\,\frac{v_{0z}}{g\tau}} \simeq \qquad (A.3.22)$$

- Avec ce développement limité, la portée devient un polynôme : $(A.3.23)$

- Formule de trigonométrie : $2\, v_{0x} v_{0z} = 2\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha = v_0^2 \sin(2\alpha)$

$$x = \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{sans frottement}} \left(-\; \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{correction principale}} \right) < \qquad (A.3.24)$$